АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Прежде всего нужно знать, что симплекс-метод является универсальным методом решения задач линейного программирования (ЗЛП) в том смысле, что он позволяет решать ЗЛП с любым количеством переменных (даже с одной переменной) и с любым набором ограничений (т.е. ограничений может быть любое количество; кроме того, эти ограничения могут быть как уравнениями, так и неравенствами со знаками $\leq$ и $\geq$).

Процесс применения симплекс-метода можно разбить на три основных этапа:

1) приведение данной ЗЛП к каноническому виду с предпочтительными ограничениями-уравнениями (подготовительный этап);
2) последовательное построение симплексных таблиц (вычислительный этап);
3) запись оптимального решения данной ЗЛП – оптимальных значений переменных и оптимального значения целевой функции (заключительный этап).

Более подробно эти этапы рассмотрим на конкретных примерах. Ниже приведены четыре примера, иллюстрирующие все ситуации, могущие возникнуть в процессе применения симплекс-метода. Так, пример 1 – это пример решения задачи, имеющей оптимальное решение; в примерах 2,3,4 продемонстрировано использование симплекс-метода для решения ЗЛП, не имеющих оптимальных решений (в примерах 2 и 4 множество допустимых решений пусто, а в примере 3 целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений).

ПРИМЕР 1. Решить симплекс-методом следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} z = 2x_1 - 3x_2 \to \max, \\ x_1 - 5x_2 \leq -5, \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ -7x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Прежде всего выясним, можно ли для данной ЗЛП построить первую симплексную таблицу. Для этого нужно, чтобы эта ЗЛП была, во-первых, **канонической**, а во-вторых, все ограничения-уравнения этой канонической ЗЛП должны быть **предпочтительны**.

Напомним, что ЗЛП является **канонической**, если:

а) условие неотрицательности в этой ЗЛП наложено на ***<u>все</u>*** переменные, т.е. в условии задачи для ***<u>каждой</u>*** имеющейся переменной x_j присутствует неравенство $x_j \geq 0$; если же окажется, что для каких-то переменных такое неравенство отсутствует, то каждую такую переменную x_j мы заменим разностью двух дополнительных неотрицательных переменных x_j' и x_j''. Другими словами, на черновике для каждой имеющейся в данной ЗЛП переменной x_j запишем неравенство $x_j \geq 0$; затем из этих записанных неравенств ***<u>вычеркнем на черновике</u>*** те, которые ***<u>присутствуют</u>*** в условии задачи. После этого для каждой переменной x_j из всех оставшихся невычеркнутыми неравенств введём в рассмотрение пару дополнительных неотрицательных переменных x_j' и x_j'' и произведём замену: $x_j = x_j' - x_j''$.

В нашем примере ЗЛП содержит две переменные x_1 и x_2, поэтому на черновике запишем два неравенства: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Из этих двух неравенств в условии задачи присутствует неравенство $x_1 \geq 0$; следовательно, его нужно вычеркнуть ***<u>на черновике</u>***, тогда на черновике останется неравенство $x_2 \geq 0$. Поэтому для этой оставшейся переменной x_2 введём в рассмотрение пару дополнительных неотрицательных переменных x_2' и x_2'' и произведём замену: $x_2 = x_2' - x_2''$. В результате получим следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} z = 2x_1 - 3(x_2' - x_2'') \to \max, \\ x_1 - 5(x_2' - x_2'') \leq -5, \\ 7x_1 + 4(x_2' - x_2'') \leq 28, \\ -7x_1 + 2(x_2' - x_2'') \geq 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0. \end{cases}$$

б) Все ограничения кроме условий неотрицательности, наложенных на переменные (т.е. кроме неравенств вида $x_j \geq 0$), должны быть ***<u>уравнениями</u>***. Если это условие не выполняется, то каждое неравенство, не являющееся неравенством вида $x_j \geq 0$, преобразуем в уравнение по следующим правилам:

- Если это неравенство содержит знак $\leq$, то в его левую часть добавим очередную (следующую по счёту, при этом начнём с u_1) неотрицательную дополнительную переменную u_i со знаком «+», а знак неравенства заменим знаком «=»;

- Если же это неравенство содержит знак $\geq$, то в его левую часть добавим очередную (следующую по счёту) неотрицательную дополнительную переменную u_i со знаком «–», а знак неравенства заменим знаком «=»;

  В нашем случае получаем (при этом попутно раскроем скобки):

$$\begin{cases} z = 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \to \max, \\ x_1 - 5x_2' + 5x_2'' + u_1 = -5, \\ 7x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + u_2 = 28, \\ -7x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - u_3 = 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

в) Мы ещё будем требовать, чтобы данная ЗЛП была задачей на ***максимум***; если же она окажется задачей на минимум, то целевую функцию z умножим на -1 и заменим **min** на **max** (см. примеры 3 и 4). В нашем примере имеем задачу на максимум, поэтому указанное преобразование делать не будем.

Выясним теперь, **предпочтительны** ли в полученной нами канонической ЗЛП все ограничения-уравнения:

г) Нужно, чтобы правые части всех уравнений были неотрицательными; если же окажется, что правая часть какого-то уравнения отрицательна, то обе части каждого такого уравнения умножим на -1. В нашем примере правая часть ***первого*** уравнения (-5) отрицательна, поэтому обе части этого уравнения умножим на -1:

$$\begin{cases} z = 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \to \max, \\ -x_1 + 5x_2' - 5x_2'' - u_1 = 5, \\ 7x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + u_2 = 28, \\ -7x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - u_3 = 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

д) Теперь внимательно рассмотрим ***каждое уравнение***:

- если в левой части рассматриваемого уравнения дополнительная переменная u_i присутствует и к тому же присутствует со знаком «+», то это уравнение **предпочтительно**, и его преобразовывать **не нужно**;
- если же в левой части рассматриваемого уравнения дополнительная переменная u_i отсутствует или присутствует со знаком «–»,то это уравнение

непредпочтительно, и его нужно преобразовать в предпочтительное; для этого в его левую часть добавим очередную (следующую по счёту, начиная с w_1) неотрицательную искусственную переменную w_i со знаком «+»;

- после того как рассмотрим последнее уравнение, ***все*** введённые искусственные переменные w_i введём также и в целевую функцию z ***с одним и тем же*** коэффициентом $-M$ (предполагается, что M – некоторое положительное число, существенно большее по абсолютной величине любого другого числа в условии данной задачи.

В нашем случае: **первое** уравнение содержит дополнительную переменную u_1 со знаком «–»; следовательно, в левую часть первого уравнения добавим искусственную переменную w_1 со знаком «+»; **второе** уравнение содержит дополнительную переменную u_2 со знаком «+», поэтому второе уравнение преобразовывать не нужно; **третье** уравнение содержит дополнительную переменную u_3 со знаком «–»;следовательно, в левую часть третьего уравнения добавим искусственную переменную w_2 со знаком «+». Кроме того, ***обе*** введённые искусственные переменные w_1 и w_2 введём также и в целевую функцию z с одним и тем же коэффициентом $-M$:

$$\begin{cases} z = 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' - Mw_1 - Mw_2 \to \max, \\ -x_1 + 5x_2' - 5x_2'' - u_1 + w_1 = 5, \\ 7x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + u_2 = 28, \\ -7x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - u_3 + w_2 = 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0,\ w_1 \ge 0,\ w_1 \ge 0. \end{cases}$$

В результате мы получили каноническую ЗЛП с предпочтительными ограничениями-уравнениями, для которой уже можно составить первую симплексную таблицу. ***Тем самым завершён первый (подготовительный) этап алгоритма симплекс-метода***.

2. Приступим теперь ко второму (**вычислительному**) этапу симплекс-метода.

а) Построим первую симплексную таблицу

$C_Б$	БП	$X_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	

0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	
$-M$	w_2	0	–7	2	–2	0	0	–1	0	1	
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

по следующим правилам:

- Определяем размеры таблицы:

количество строк = количество *__уравнений__* + 3;

количество столбцов = количество переменных (включая дополнительные переменные со штрихами u_i, а также искусственные переменные w_i) **+ 4**.

- Заполняем шапку таблицы (то, что ниже выделено зелёным цветом): в шапке первых трёх столбцов пишем соответственно $С_Б$, БП и $Х_Б$; в нижних половинах строки, разделённой пополам, запишем все имеющиеся в последней записанной ЗЛП переменные (включая дополнительные и искусственные); в шапке последнего столбца запишем Q.

$С_Б$	БП	$Х_Б$									Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	

- Заполняем строку над переменными (то, что ниже выделено синим цветом): в каждую верхнюю ячейку строки, разделённой пополам, запишем коэффициент целевой функции z при переменной, стоящей в соответствующей нижней (зелёной) ячейке (при этом считаем, что если какая-то переменная отсутствует в целевой функции z, то соответствующий этой переменной коэффициент равен нулю).

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	

- Заполняем столбец БП («базисные переменные») (он ниже выделен оранжевым цветом): для заполнения ***первой*** ячейки столбца БП внимательно рассмотрим ***левую часть первого уравнения***; если в ней присутствует искусственная переменная w_i, то эту переменную w_i запишем в первую ячейку столбца БП, а если в левой части первого уравнения искусственная переменная w_i отсутствует, то в первую ячейку столбца БП запишем дополнительную переменную u_1. Аналогично заполняются все остальные ячейки столбца БП.

В нашем случае левая часть ***первого*** уравнения содержит искусственную переменную w_1, поэтому в ***первую*** ячейку столбца БП запишем эту переменную w_1; в левой части ***второго*** уравнения искусственная переменная w_i отсутствует, поэтому во ***вторую*** ячейку столбца БП запишем дополнительную переменную u_2; левая часть ***третьего*** уравнения содержит искусственную переменную w_2, поэтому в ***третью*** ячейку столбца БП запишем эту переменную w_2.

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	– M	– M	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
	w_1										
	u_2										
	w_2										

- Заполняем столбец $С_Б$ (он ниже выделен фиолетовым цветом): справа от w_i (см. столбец БП) запишем $-M$, а справа от u_i запишем 0.

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	– M	– M	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
– M	w_1										
0	u_2										
– M	w_2										

- Заполняем столбец $X_Б$ (он выделен коричневым цветом): в него запишем правые части ***<u>уравнений</u>***.

$C_Б$	БП	$X_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5									
0	u_2	28									
$-M$	w_2	0									

- Заполняем столбцы, соответствующие всем имеющимся переменным (они ниже выделены красным цветом): в столбец, соответствующий первой переменной x_1 (см. шапку таблицы (зелёную)), запишем коэффициенты при этой переменной x_1 в левых частях ***<u>уравнений</u>*** (целевую функцию z ***<u>не рассматриваем</u>***!); в столбец, соответствующий следующей переменной x_2' (снова см. шапку таблицы (зелёную)), запишем коэффициенты при этой переменной x_2' в левых частях ***<u>уравнений</u>***, и т.д. до тех пор, пока не заполним столбец, соответствующий последней переменной, записанной в шапке таблицы (зелёной). При этом учтём, что ***<u>если данная переменная в некотором уравнении отсутствует, то соответствующий коэффициент равен нулю</u>***.

$C_Б$	БП	$X_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	
$-M$	w_2	0	–7	2	–2	0	0	–1	0	1	

- Заполним последнюю строку столбца $X_Б$ (эта (одна!) ячейка ниже выделена чёрным цветом): туда запишем сумму произведений соответствующих элементов столбцов $C_Б$ и $X_Б$; другими словами, сначала каждый элемент фиолетового столбца умножим на соответствующий (стоящий в той же строке) элемент коричневого столбца, а затем сложим все полученные произведения.

<u>В нашем случае</u>:

$$-M \cdot 5 + 0 \cdot 28 + (-M) \cdot 0 = -5M.$$

$C_Б$	БП	$X_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	
$-M$	w_2	0	–7	2	–2	0	0	–1	0	1	
		$-5M$									

- Заполним все остальные ячейки последней строки (ниже они выделены серым цветом): от суммы произведений соответствующих элементов столбца $C_Б$ и рассматриваемого столбца отнимем число, стоящее в рассматриваемом столбце над переменной. Другими словами, для заполнения очередной серой ячейки сначала каждый элемент фиолетового столбца умножим на соответствующий (стоящий в той же строке) элемент рассматриваемого красного столбца (т.е. того красного столбца, в котором находится заполняемая сейчас серая ячейка), затем сложим все полученные произведения, а после этого от полученной суммы отнимем число из синей ячейки, находящейся в этом же столбце.

<u>В нашем случае</u>:

В первую серую ячейку запишем

$$-M \cdot (-1) + 0 \cdot 7 + (-M) \cdot (-7) - 2 = 8M - 2;$$

во вторую ячейку запишем

$$-M \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-M) \cdot 2 - (-3) = -7M + 3,$$

и т.д.

$C_Б$	БП	$X_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	

$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	
$-M$	w_2	0	–7	2	–2	0	0	–1	0	1	
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

- Столбец Q (выше он остался незакрашенным) пока не заполняется.

б) Последняя строка таблицы ***кроме самого левого её элемента*** (т.е. ***все серые*** ячейки) исследуется на наличие в ней отрицательных чисел. Возможны два случая: 1) таких чисел нет; 2) такие числа есть.

- Если в последней строке нет отрицательных чисел (т.е. в серой строке все числа ≥ 0), то больше симплексных таблиц строить не нужно; данная ЗЛП решена, и нужно записать ответ в этой задаче; как это делать, см. ниже в пункте **3**.
- Если в последней (***серой!***) строке есть числа <0, то среди этих отрицательных чисел (***самый левый элемент последней строки (чёрная ячейка) не рассматривается!***) выбирается какое-нибудь одно (желательно максимальное по модулю, т.е. «самое отрицательное») и обводится кружком; столбец, в котором оно находится, называется **разрешающим столбцом**. При этом считается, что M – положительное число, существенно большее любого другого числа в данной таблице (например, можно считать, что M – первая буква слова «миллиард»).

В нашем случае среди чисел $8M-2$, $-7M+3$, $7M-3$, M, 0, M, 0, 0, находящихся в серых ячейках, только одно является отрицательным – это $-7M+3$, поэтому именно это число обводим кружком; тогда столбец x_2', в котором оно находится, является разрешающим столбцом (он выделен жёлтым цветом)

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	
$-M$	w_2	0	–7	2	–2	0	0	–1	0	1	

$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0

в) Разрешающий столбец (жёлтый) исследуется на наличие в нём ***положительных*** чисел (***строго*** положительных!).

- Если таких нет, то данная симплексная таблица – последняя; в этом случае нужно посмотреть в последнюю строку столбца $X_Б$ (чёрная ячейка): если в ней число M присутствует, то данная ЗЛП ***не имеет оптимальных решений из-за того, что её множество допустимых решений пусто*** (см. пример 2); если же в ней число M отсутствует, то данная ЗЛП ***не имеет оптимальных решений из-за того, что целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений*** (см. пример 3)**.**
- Если в разрешающем столбце присутствует только одно положительное число, то это положительное число называется разрешающим элементом и обводится квадратом.
- Если в разрешающем столбце присутствует несколько положительных чисел, то заполняем столбец Q:
  - Напротив всех нулевых и отрицательных элементов ***разрешающего столбца*** (жёлтого) ставятся прочерки;
  - Во всех остальных ячейках столбца Q запишем отношения соответствующих пар элементов столбцов $X_Б$ (коричневого) и разрешающего (жёлтого), т.е. для заполнения очередной ячейки столбца Q нужно элемент коричневого столбца, стоящий в той же строке, разделить на соответствующий элемент жёлтого столбца;
  - Среди элементов столбца Q выберем минимальный; строка, в которой он находится, называется разрешающей строкой (мы её ниже выделили голубым цветом); элемент на пересечении разрешающей стоки (голубой) и разрешающего столбца (жёлтого) является разрешающим элементом (мы его ниже выделили зелёным цветом), он обводится квадратом.

В нашем случае разрешающий столбец содержит несколько положительных чисел (три), поэтому заполняем столбец Q: так как в разрешающем столбце нет нулевых и отрицательных чисел, то прочерки в столбце Q не ставим; первый элемент столбца Q равен $\frac{5}{5} = 1$, второй элемент столбца Q равен $\frac{28}{4} = 7$, третий элемент столбца Q равен $\frac{0}{2} = 0$, минимальным в столбце Q является число 0, следовательно, третья строка, в которой находится этот 0, является разрешающей строкой; тогда разрешающим элементом будет элемент 2, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	1
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	7
$-M$	w_2	0	–7	$\boxed{2}$	–2	0	0	–1	0	1	0
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

г) После того как найден разрешающий элемент, строится следующая симплексная таблица; при этом нужно учитывать, что во всех таблицах, начиная со второй, столбец $С_Б$ и строка над переменными не нужны. В новую таблицу из прежней без изменений переносится ***<u>только шапка</u>***!

БП	$Х_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q

- Столбец БП новой таблицы получается из столбца БП предыдущей таблицы заменой переменной из разрешающей строки (голубой) на переменную из шапки разрешающего столбца (жёлтого); все остальные элементы столбца БП переносятся без изменений. В нашем случае в столбце БП предыдущей таблицы $\begin{matrix} w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{matrix}$ заменим переменную из разрешающей строки w_2 на переменную из шапки разрешающего столбца x_2'; в результате получим столбец БП новой таблицы: $\begin{matrix} w_1 \\ u_2 \\ x_2' \end{matrix}$.

БП	$Х_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1										
u_2										
x_2'										

- Затем заполняем строку новой таблицы, соответствующую разрешающей строке (голубой) предыдущей таблицы. Для этого все элементы разрешающей строки (***в том числе и элемент, стоящий в столбце $x_б$, а также разрешающий элемент***), кроме элемента, стоящего в столбце Q, делятся на разрешающий элемент:

БП	$Х_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1										
u_2										
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	

- Затем заполняем столбец новой таблицы, соответствующий разрешающему столбцу (жёлтому) предыдущей таблицы – во все пустые ячейки этого столбца (***в том числе и в ячейку последней строки***) запишем 0:

БП	$Х_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1			0							
u_2			0							
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	
			0							

- Все остальные пустые ячейки (***<u>в том числе в столбце $x_б$ и в последней строке</u>***) заполняются по **правилу прямоугольника**:
  - Рассмотрим предыдущую таблицу:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	1
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	7
$-M$	w_2	0	–7	$\boxed{2}$	–2	0	0	–1	0	1	0
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

В этой таблице выделим элемент, соответствующий вычисляемому элементу новой таблицы (т.е. элемент, стоящий на том же месте). Элементы новой таблицы вычислять по правилу прямоугольника можно в любом порядке. Начнём, например, с элемента, стоящего в первой строке столбца $Х_Б$; ему в предыдущей таблице соответствует элемент 5, стоящий на том же месте (мы его выделили зелёным цветом):

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	1
0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	7
$-M$	w_2	0	–7	$\boxed{2}$	–2	0	0	–1	0	1	0
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

  - Затем в предыдущей таблице мысленно построим прямоугольник, для которого этот выделенный нами элемент и разрешающий элемент (обведённый квадратом) являются концами одной из диагоналей:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	2	–3	3	0	0	0	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	
$-M$	w_1	5	–1	5	–5	–1	0	0	1	0	1

0	u_2	28	7	4	–4	0	1	0	0	0	7
$-M$	w_2	0	–7	$\boxed{2}$	–2	0	0	–1	0	1	0
		$-5M$	$8M-2$	$-7M+3$	$7M-3$	M	0	M	0	0	

(мы этот прямоугольник выделили серым цветом). Диагональ этого прямоугольника, содержащая разрешающий элемент (обведённый квадратом), называется главной диагональю, другая диагональ – неглавная.

– Нужно от произведения элементов ***на концах главной диагонали*** отнять произведение элементов ***на концах неглавной диагонали***, и полученную разность разделить на разрешающий элемент (обведённый квадратом). ***таким образом, запись вычисления по правилу прямоугольника мы начинаем и заканчиваем разрешающим элементом***. В нашем случае:

$$\frac{2\cdot 5-5\cdot 0}{2}=5.$$

Аналогично вычисляем все остальные элементы новой таблицы.

Строка w_1, столбец x_1: $\frac{2\cdot(-1)-5\cdot(-7)}{2}=\frac{33}{2}$;

Строка w_1, столбец x_2'': $\frac{2\cdot(-5)-5\cdot(-2)}{2}=0$;

Строка w_1, столбец u_1: $\frac{2\cdot(-1)-5\cdot 0}{2}=-1$;

Строка w_1, столбец u_2: $\frac{2\cdot 0-5\cdot 0}{2}=0$;

Строка w_1, столбец u_3: $\frac{2\cdot 0-5\cdot(-1)}{2}=\frac{5}{2}$;

Строка w_1, столбец w_1: $\frac{2\cdot 1-5\cdot 0}{2}=1$;

Строка w_1, столбец w_2: $\frac{2\cdot 0-5\cdot 1}{2}=-\frac{5}{2}$;

Строка u_2, столбец $X_Б$: $\frac{2\cdot 28-4\cdot 0}{2}=28$;

Строка u_2, столбец x_1: $\frac{2\cdot7-4\cdot(-7)}{2}=21;$

Строка u_2, столбец x_2'': $\frac{2\cdot(-4)-4\cdot(-2)}{2}=0;$

Строка u_2, столбец u_1: $\frac{2\cdot0-4\cdot0}{2}=0;$

Строка u_2, столбец u_2: $\frac{2\cdot1-4\cdot0}{2}=1;$

Строка u_2, столбец u_3: $\frac{2\cdot0-4\cdot(-1)}{2}=2;$

Строка u_2, столбец w_1: $\frac{2\cdot0-4\cdot0}{2}=0;$

Строка u_2, столбец w_2: $\frac{2\cdot0-4\cdot1}{2}=-2;$

Последняя строка, столбец Х$_Б$: $\frac{2\cdot(-5M)-(-7M+3)\cdot0}{2}=-5M;$

Последняя строка, столбец x_1: $\frac{2\cdot(8M-2)-(-7M+3)\cdot(-7)}{2}=-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2};$

Последняя строка, столбец x_2'': $\frac{2\cdot(7M-3)-(-7M+3)\cdot(-2)}{2}=0;$

Последняя строка, столбец u_1: $\frac{2\cdot M-(-7M+3)\cdot0}{2}=M;$

Последняя строка, столбец u_2: $\frac{2\cdot0-(-7M+3)\cdot0}{2}=0;$

Последняя строка, столбец u_3: $\frac{2\cdot M-(-7M+3)\cdot(-1)}{2}=-\frac{5}{2}M+\frac{3}{2};$

Последняя строка, столбец w_1: $\frac{2\cdot0-(-7M+3)\cdot0}{2}=0;$

Последняя строка, столбец w_2: $\frac{2\cdot0-(-7M+3)\cdot1}{2}=\frac{7}{2}M-\frac{3}{2}.$

В результате получаем следующую таблицу:

БП	Х$_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1	5	33/2	0	0	-1	0	5/2	1	-5/2	
u_2	28	21	0	0	0	1	2	0	-2	
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	
	-5M	-33M/2+17/2	0	0	M	0	-5M/2+3/2	0	7M/2-3/2	

Здесь синим цветом выделены элементы, вычисляемые в первую очередь, жёлтым – во вторую, красным – в третью.

д) Снова последняя строка таблицы ***кроме самого левого её элемента*** исследуется на наличие в ней отрицательных чисел, т.е. возвращаемся в подпункт **б)** пункта **2** данного алгоритма и повторяем все действия подпунктов **б)**, **в)** и **г)** столько раз, сколько необходимо. В нашем случае в последней строке присутствуют два отрицательных числа: -33M/2+17/2 и -5M/2-3/2; из них выберем максимальное по модулю -33M/2+17/2 и обведём его окружностью; столбец x_1, в котором оно находится, – разрешающий столбец:

БП	Х$_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1	5	33/2	0	0	-1	0	5/2	1	-5/2	
u_2	28	21	0	0	0	1	2	0	-2	
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	
	-5M	-33M/2 +17/2	0	0	M	0	-5M/2+3/2	0	7M/2-3/2	

В разрешающем столбце (жёлтом) несколько (а именно два) положительных чисел, поэтому заполняем столбец Q: напротив отрицательного элемента -7/2 разрешающего столбца (жёлтого) ставим прочерк, а в остальные ячейки столбца Q запишем соответствующие отношения элементов столбца Х$_Б$ к элементам разрешающего столбца, а именно 5:(33/2)=10/33 и 28:21=4/3.

БП	Х$_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
w_1	5	33/2	0	0	-1	0	5/2	1	-5/2	10/33
u_2	28	21	0	0	0	1	2	0	-2	4/3
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	–
	-5M	-33M/2 +17/2	0	0	M	0	-5M/2+3/2	0	7M/2-3/2	

Среди элементов столбца Q выберем минимальный – это 10/33, следовательно, разрешающей строкой является первая строка, в которой находится этот элемент 10/33. Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца – это 33/2 – является разрешающим элементом.

БП	Х$_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q

w_1	5	$\boxed{33/2}$	0	0	-1	0	5/2	1	-5/2	10/33
u_2	28	21	0	0	0	1	2	0	-2	4/3
x_2'	0	-7/2	1	-1	0	0	-1/2	0	1/2	–
	$-5M$	$-33M/2$ $+17/2$	0	0	M	0	$-5M/2+3/2$	0	$7M/2-3/2$	

Строим следующую таблицу с той же шапкой:

БП	ХБ	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q

Для получения столбца БП новой таблицы произведём следующую замену в столбце БП предыдущей таблицы: переменную w_1, стоящую в разрешающей строке (голубой), заменим на переменную x_1, стоящую в шапке разрешающего столбца (жёлтого).

БП	ХБ	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
x_1										
u_2										
x_2'										

Далее заполняем первую строку, соответствующую разрешающей строке предыдущей таблицы, разделив эту разрешающую строку (голубую) на разрешающий элемент (обведённый квадратом, т.е. зелёный):

БП	ХБ	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
x_1	10/33	1	0	0	-2/33	0	5/33	2/33	-5/33	
u_2										
x_2'										

Затем заполняем столбец x_1 новой таблицы, соответствующий разрешающему столбцу предыдущей таблицы (жёлтому), записав во все его пустые ячейки 0:

БП	$X_Б$	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
x_1	10/33	1	0	0	-2/33	0	5/33	2/33	-5/33	
u_2		0								
x_2'		0								
		0								

И, наконец, применим правило прямоугольника для заполнения всех остальных ячеек новой таблицы за исключением столбца Q:

Строка u_2, столбец $X_Б$: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 28-21\cdot 5}{\frac{33}{2}}=\frac{238}{11}$;

Строка u_2, столбец x_2': $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-21\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0$;

Строка u_2, столбец x_2'': $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-21\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0$;

Строка u_2, столбец u_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-21\cdot(-1)}{\frac{33}{2}}=\frac{14}{11}$;

Строка u_2, столбец u_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 1-21\cdot 0}{\frac{33}{2}}=1$;

Строка u_2, столбец u_3: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 2-21\cdot\frac{5}{2}}{\frac{33}{2}}=-\frac{13}{11}$;

Строка u_2, столбец w_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-21\cdot 1}{\frac{33}{2}}=-\frac{14}{11}$;

Строка u_2, столбец w_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot(-2)-21\cdot(-\frac{5}{2})}{\frac{33}{2}}=\frac{13}{11}$;

Строка x_2', столбец $X_Б$: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{7}{2})\cdot 5}{\frac{33}{2}}=\frac{35}{33}$;

Строка x_2', столбец x_2': $\frac{\frac{33}{2}\cdot 1-(-\frac{7}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=1$;

Строка x_2', столбец x_2'': $\frac{\frac{33}{2}\cdot(-1)-(-\frac{7}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=-1$;

Строка x_2', столбец u_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{7}{2})\cdot(-1)}{\frac{33}{2}}=-\frac{7}{33}$;

Строка x_2', столбец u_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{7}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0;$

Строка x_2', столбец u_3: $\frac{\frac{33}{2}\cdot(-\frac{1}{2})-(-\frac{7}{2})\cdot\frac{5}{2}}{\frac{33}{2}}=\frac{1}{33};$

Строка x_2', столбец w_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{7}{2})\cdot 1}{\frac{33}{2}}=\frac{7}{33};$

Строка x_2', столбец w_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot\frac{1}{2}-(-\frac{7}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{\frac{33}{2}}=-\frac{1}{33};$

Последняя строка, столбец ХБ: $\frac{\frac{33}{2}\cdot(-5M)-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot 5}{\frac{33}{2}}=-\frac{85}{33};$

Последняя строка, столбец x_2': $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0;$

Последняя строка, столбец x_2'': $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0;$

Последняя строка, столбец u_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot M-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot(-1)}{\frac{33}{2}}=\frac{17}{33};$

Последняя строка, столбец u_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot 0}{\frac{33}{2}}=0;$

Последняя строка, столбец u_3: $\frac{\frac{33}{2}\cdot(-\frac{5}{2}M+\frac{3}{2})-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot\frac{5}{2}}{\frac{33}{2}}=\frac{7}{33};$

Последняя строка, столбец w_1: $\frac{\frac{33}{2}\cdot 0-(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2})\cdot 1}{\frac{33}{2}}=M-\frac{17}{33};$

Последняя строка, столбец w_2: $\frac{\frac{33}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}M-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{33}{2}M+\frac{17}{2}\right)\cdot(-\frac{5}{2})}{\frac{33}{2}}=M-\frac{7}{33}.$

В результате получаем следующую таблицу:

БП	ХБ	x_1	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	Q
x_1	10/33	1	0	0	-2/33	0	5/33	2/33	-5/33	
u_2	238/11	0	0	0	14/11	1	-13/11	-14/11	13/11	
x_2'	35/33	0	1	-1	-7/33	0	1/33	7/33	-1/33	
	-85/33	0	0	0	17/33	0	7/33	M-17/33	M-7/33	

В последней строке нет отрицательных чисел (напомним, что самый левый элемент последней строки не учитывается, а M – очень большое положительное число, существенно превосходящее любое другое число в данной таблице). Следовательно, можно перейти к заключительному этапу симплекс-метода.

3. Выпишем оптимальные значения переменных.

а) Для этого сначала запишем все переменные решаемой нами канонической ЗЛП с предпочтительными ограничениями-уравнениями (эти переменные можно взять из шапки последней симплексной таблицы):

$x_1 =$

$x_2' =$

$x_2'' =$

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

$w_1 =$

$w_2 =$

Оптимальное значение каждой переменной, ***присутствующей*** в столбце БП последней симплексной таблицы, берётся ***из столбца*** $X_Б$ последней симплексной таблицы:

$x_1 = \frac{10}{33}$

$x_2' = \frac{35}{33}$

$x_2'' =$

$u_1 =$

$u_2 = \frac{238}{11}$

$u_3 =$

$w_1 =$

$w_2 =$

Оптимальные значения всех остальных переменных равны нулю:

$$x_1 = \frac{10}{33},$$

$$x_2' = \frac{35}{33},$$

$$x_2'' = 0,$$

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \frac{238}{11},$$

$$u_3 = 0,$$

$$w_1 = 0,$$

$$w_2 = 0.$$

б) Выясним, все ли искусственные переменные w_i равны нулю. Если они все равны нулю, то все эти искусственные переменные w_i вычеркнем; если же хотя бы одна из искусственных переменных w_i не равна нулю, то данная ЗЛП не имеет оптимальных решений из-за того, что её множество допустимых решений пусто. ***в нашем случае*** обе искусственные переменные w_1 и w_2 равны нулю, следовательно, их нужно вычеркнуть. В результате получаем:

$$x_1 = \frac{10}{33},$$

$$x_2' = \frac{35}{33},$$

$$x_2'' = 0,$$

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \frac{238}{11},$$

$$u_3 = 0.$$

в) Вычеркнем все дополнительные переменные u_i, ***даже если они не равны нулю***:

$$x_1 = \frac{10}{33},$$

$$x_2' = \frac{35}{33},$$

$$x_2'' = 0.$$

г) Для всех дополнительных переменных x_j' и x_j'' произведём обратную замену $x_j = x_j' - x_j''$. В нашем случае $x_2 = x_2' - x_2'' = \frac{35}{33} - 0 = \frac{35}{33}$. Таким образом, получаем:

$$x_1 = \frac{10}{33},$$

$$x_2 = \frac{35}{33}.$$

д) Оптимальное значение целевой функции берём из последней строки столбца $X_Б$ последней симплексной таблицы:

$$z_{\text{оптим}} = -\frac{85}{33}.$$

Если в исходной ЗЛП целевая функция ***минимизировалась***, то найденное оптимальное значение целевой функции нужно ещё умножить на –1.

***Таким образом, получаем следующее оптимальное решение данной злп*:**

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{33}, \\ x_2 = \dfrac{35}{33}, \\ z_{\text{оптим}} = -\dfrac{85}{33}. \end{cases}$$

ПРИМЕРЫ ЗЛП, НЕ ИМЕЮЩИХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Из приведённого выше алгоритма следует, что у ЗЛП может не оказаться оптимальных решений либо потому, что множество допустимых решений этой ЗЛП пусто, либо потому, что целевая функция данной ЗЛП не ограничена на множестве допустимых решений. Приведём примеры, иллюстрирующие эти случаи.

ПРИМЕР 2. Решить симплекс-методом следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} z = 5x_1 - 2x_2 \to \max, \\ x_1 - 2x_2 \le -4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - 2x_2 \ge 4. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приведём данную ЗЛП к каноническому виду.

а) Поскольку условие неотрицательности не наложено ***ни на одну переменную***, то ***обе имеющиеся переменные*** x_1 и x_2 заменим разностями дополнительных переменных: $x_1 = x_1' - x_1''$ и $x_2 = x_2' - x_2''$. В результате получим:

$$\begin{cases} z = 5(x_1' - x_1'') - 2(x_2' - x_2'') \to \max, \\ x_1' - x_1'' - 2(x_2' - x_2'') \le -4, \\ 2(x_1' - x_1'') + x_2' - x_2'' \ge 6, \\ x_1' - x_1'' - 2(x_2' - x_2'') \ge 4, \\ x_1' \ge 0,\ x_1'' \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0. \end{cases}$$

б) Все ограничения кроме условий неотрицательности, наложенных на переменные (т.е. кроме неравенств вида $x_j \ge 0$), преобразуем в уравнения:

$$\begin{cases} z = 5x_1' - 5x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' \to \max, \\ x_1' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' + u_1 = -4, \\ 2x_1' - 2x_1'' + x_2' - x_2'' - u_2 = 6, \\ x_1' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' - u_3 = 4, \\ x_1' \ge 0,\ x_1'' \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0. \end{cases}$$

в) Правая часть первого уравнения отрицательна, поэтому обе части первого уравнения умножим на –1:

$$\begin{cases} z = 5x_1' - 5x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' \to \max, \\ -x_1' + x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' - u_1 = 4, \\ 2x_1' - 2x_1'' + x_2' - x_2'' - u_2 = 6, \\ x_1' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' - u_3 = 4, \\ x_1' \ge 0,\ x_1'' \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0. \end{cases}$$

г) В левой части каждого уравнения соответствующая дополнительная переменная u_i содержится со знаком «–», поэтому в левую часть каждого уравнения добавим очередную (следующую по счёту, начиная с w_1) неотрицательную искусственную переменную w_i со знаком «+»; ***все*** введённые искусственные переменные w_i введём также и в целевую функцию z ***с одним и тем же*** коэффициентом $-M$:

$$
\begin{cases}
z = 5x_1' - 5x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' - Mw_1 - Mw_2 - Mw_3 \to \max, \\
-x_1' + x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' - u_1 + w_1 = 4, \\
2x_1' - 2x_1'' + x_2' - x_2'' - u_2 + w_2 = 6, \\
x_1' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' - u_3 + w_3 = 4, \\
x_1',\ x_1'',\ x_2',\ x_2'',\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0.
\end{cases}
$$

2. Строим первую симплексную таблицу. Последняя ЗЛП содержит 10 переменных, поэтому в первой симплексной таблице будет 10+4=14 столбцов. Далее, последняя ЗЛП содержит 3 уравнения, поэтому в первой симплексной таблице будет 3+3=6 строк. Заполним шапку таблицы.

$С_Б$	БП	$Х_Б$											Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	

Заполним строку над переменными коэффициентами при этих переменных в целевой функции z:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	5	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	

Теперь заполним столбец БП. В каждом из уравнений присутствует соответствующая искусственная переменная w_i, поэтому столбец БП состоит только из искусственных переменных. Далее, заполним все остальные столбцы кроме Q так, как это указано в подпункте **а)** пункта **2** приведённого выше алгоритма:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	5	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	
-M	w_1	4	-1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	
-M	w_2	6	2	-2	1	-1	0	-1	0	0	1	0	
-M	w_3	4	1	-1	-2	2	0	0	-1	0	0	1	

Теперь заполним последнюю строку:

Столбец $Х_Б$: $-M \cdot 4 + (-M) \cdot 6 + (-M) \cdot 4 = -14M$;

Столбец x_1': $-M \cdot (-1) + (-M) \cdot 2 + (-M) \cdot 1 - 5 = -2M - 5$;

Столбец x_1'': $-M \cdot 1 + (-M) \cdot (-2) + (-M) \cdot (-1) - (-5) = 2M + 5$;

Столбец x_2': $-M \cdot 2 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot (-2) - (-2) = -M + 2$;

Столбец x_2'': $-M \cdot (-2) + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 2 - 2 = M - 2$;

Столбец u_1: $-M \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = M$;

Столбец u_2: $-M \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 - 0 = M$;

Столбец u_3: $-M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) - 0 = M$;

Столбец w_1: $-M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0$;

Столбец w_2: $-M \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0$;

Столбец w_3: $-M \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - (-M) = 0$:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	5	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	
-M	w_1	4	-1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	
-M	w_2	6	2	-2	1	-1	0	-1	0	0	1	0	
-M	w_3	4	1	-1	-2	2	0	0	-1	0	0	1	
		-14M	-2M-5	2M+5	-M+2	M-2	M	M	M	0	0	0	

Далее, среди элементов последней строки (за исключением самого левого элемента) найдём отрицательные – это -2M-5 и -M+2, из них выберем максимальный по модулю – это -2M-5 – и обведём его кружком; столбец, в котором он находится (жёлтый), является разрешающим столбцом. В разрешающем столбце два положительных числа, поэтому заполним столбец Q: напротив отрицательного элемента -1 разрешающего столбца поставим прочерк, а в остальные ячейки столбца Q запишем отношения элементов столбца $Х_Б$ к соответствующим элементам разрешающего столбца: $\frac{6}{2} = 3$ и $\frac{4}{1} = 4$:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	5	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	
-M	w_1	4	-1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	-
-M	w_2	6	2	-2	1	-1	0	-1	0	0	1	0	3
-M	w_3	4	1	-1	-2	2	0	0	-1	0	0	1	4
		-14M	-2M-5	2M+5	-M+2	M-2	M	M	M	0	0	0	

Среди элементов столбца Q выберем минимальный – это 3; строка, в которой он находится (голубая), – разрешающая строка. Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца – это 2 – является разрешающим элементом. Разрешающий элемент обведём квадратом.

$C_Б$	БП	$X_Б$	5	-5	-2	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	Q
			x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	
$-M$	w_1	4	-1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	-
$-M$	w_2	6	$\boxed{2}$	-2	1	-1	0	-1	0	0	1	0	3
$-M$	w_3	4	1	-1	-2	2	0	0	-1	0	0	1	4
		$-14M$	$-2M-5$	$2M+5$	$-M+2$	$M-2$	M	M	M	0	0	0	

Строим следующие симплексные таблицы по правилам, указанным в подпункте **г)** пункта **2** приведённого выше алгоритма.

БП	$X_Б$	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	Q
w_1	7	0	0	5/2	-5/2	-1	-1/2	0	1	1/2	0	
x_1'	3	1	-1	1/2	-1/2	0	-1/2	0	0	1/2	0	
w_3	1	0	0	-5/2	$\boxed{5/2}$	0	1/2	-1	0	-1/2	1	
	$-8M+15$	0	0	9/2	-9/2	M	-5/2	M	0	$M+5/2$	0	

Заметим, что в последней таблице в разрешающем столбце (жёлтом) имеется только одно положительное число 5/2, поэтому нет необходимости заполнять столбец Q – это число 5/2 и будет разрешающим элементом.

БП	$X_Б$	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	Q
w_1	8	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	1	
x_1'	16/5	1	-1	0	0	0	-2/5	-1/5	0	2/5	1/5	
x_2''	2/5	0	0	-1	1	0	$\boxed{1/5}$	-2/5	0	-1/5	2/5	
	$-8M+84/5$	0	0	0	0	M	-8/5	$M-9/5$	0	$M+8/5$	$M+9/5$	

БП	$X_Б$	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	u_1	u_2	u_3	w_1	w_2	w_3	Q
w_1	8	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	1	
x_1'	4	1	-1	-2	2	0	0	-1	0	0	1	
u_2	2	0	0	-5	5	0	1	-2	0	-1	2	
	$-8M+20$	0	0	-8	8	M	0	M-5	0	M	5	

В последней таблице в разрешающем столбце (жёлтом) нет положительных чисел. Следовательно, нужно обратить внимание на последнюю строку столбца $X_Б$ последней симплексной таблицы (чёрная ячейка). Мы видим, что в этой ячейке присутствует M; как указано в подпункте **в)** пункта **2** приведённого выше алгоритма, это означает, что данная ЗЛП ***не имеет оптимальных решений из-за того, что её множество допустимых решений пусто***.

ПРИМЕР 3. Решить симплекс-методом следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} z = x_1 - x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приведём данную ЗЛП к каноническому виду.

а) Поскольку условие неотрицательности наложено ***на все переменные***, то дополнительные переменные со штрихами x_j' и x_j'' ***вводить не нужно***.

б) Все ограничения кроме условий неотрицательности, наложенных на переменные (т.е. кроме неравенств вида $x_j \geq 0$), преобразуем в уравнения:

$$\begin{cases} z = x_1 - x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 5x_2 + u_1 = 10, \\ x_1 + x_2 - u_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - u_3 = -6, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \; u_1 \geq 0, \; u_2 \geq 0, \; u_3 \geq 0. \end{cases}$$

в) Потребуем, чтобы данная ЗЛП была задачей на ***максимум***; для этого целевую функцию z умножим на -1 и заменим **min** на **max**:

$$\begin{cases} z = -x_1 + x_2 \to \max, \\ 2x_1 - 5x_2 + u_1 = 10, \\ x_1 + x_2 - u_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - u_3 = -6, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_3 \geq 0. \end{cases}$$

г) Правая часть третьего уравнения отрицательна, поэтому обе части третьего уравнения умножим на –1:

$$\begin{cases} z = -x_1 + x_2 \to \max, \\ 2x_1 - 5x_2 + u_1 = 10, \\ x_1 + x_2 - u_2 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + u_3 = 6, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_3 \geq 0. \end{cases}$$

д) В левой части второго уравнения соответствующая дополнительная переменная u_2 содержится со знаком «–», поэтому в левую часть второго уравнения добавим неотрицательную искусственную переменную w_1 со знаком «+»; эту искусственную переменную w_1 введём также и в целевую функцию z с коэффициентом – M:

$$\begin{cases} z = -x_1 + x_2 - Mw_1 \to \max, \\ 2x_1 - 5x_2 + u_1 = 10, \\ x_1 + x_2 - u_2 + w_1 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + u_3 = 6, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_3 \geq 0, \ \ w_1 \geq 0. \end{cases}$$

2. Строим первую симплексную таблицу. Последняя ЗЛП содержит 6 переменных, поэтому в первой симплексной таблице будет 6+4=10 столбцов. Далее, последняя ЗЛП содержит 3 уравнения, поэтому в первой симплексной таблице будет 3+3=6 строк. Заполним шапку таблицы.

$С_Б$	БП	$Х_Б$							Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	

Заполним строку над переменными коэффициентами при этих переменных в целевой функции z:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-1	1	0	0	0	-M	Q

			x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	

Теперь заполним столбец БП. Искусственная переменная присутствует только ***<u>во втором уравнении</u>***, поэтому эту искусственную переменную w_1 запишем ***<u>во вторую строку</u>*** столбца БП; в первую же и третью строки столбца БП запишем соответствующие дополнительные переменные u_1 и u_3. Далее, заполним все остальные столбцы кроме Q так, как это указано в подпункте **а)** пункта **2** приведённого выше алгоритма:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-1	1	0	0	0	-*M*	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	
0	u_1	10	2	-5	1	0	0	0	
-*M*	w_1	1	1	1	0	-1	0	1	
0	u_3	6	-3	2	0	0	1	0	
		-*M*	-*M*+1	-*M*-1	0	*M*	0	0	

Далее, среди элементов последней строки (за исключением самого левого элемента) найдём отрицательные – это –*M*+1 и –*M*–1, из них выберем максимальный по модулю – это –*M*–1 – и обведём его окружностью; столбец, в котором он находится (жёлтый), является разрешающим столбцом. В разрешающем столбце два положительных числа, поэтому заполним столбец Q: напротив отрицательного элемента -5 разрешающего столбца поставим прочерк, а в остальные ячейки столбца Q запишем отношения элементов столбца $Х_Б$ к соответствующим элементам разрешающего столбца: $\frac{1}{1} = 1$ и $\frac{6}{2} = 3$:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-1	1	0	0	0	-*M*	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	
0	u_1	10	2	-5	1	0	0	0	–
-*M*	w_1	1	1	1	0	-1	0	1	1
0	u_3	6	-3	2	0	0	1	0	3
		-*M*	-*M*+1	-*M*-1	0	*M*	0	0	

Среди элементов столбца Q выберем минимальный – это 1; строка, в которой он находится (голубая), – разрешающая строка. Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца – это 1 – является разрешающим элементом. Разрешающий элемент обведём квадратом.

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-1	1	0	0	0	-M	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	
0	u_1	10	2	-5	1	0	0	0	–
-M	w_1	1	1	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	1
0	u_3	6	-3	2	0	0	1	0	3
		-M	-M+1	-M-1	0	M	0	0	

Строим следующие симплексные таблицы по правилам, указанным в подпункте **г)** пункта **2** приведённого выше алгоритма.

БП	$Х_Б$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	Q
u_1	15	7	0	1	-5	0	5	
x_2	1	1	1	0	-1	0	1	
u_3	4	-5	0	0	$\boxed{2}$	1	-2	
	1	2	0	0	-1	0	M+1	

Заметим, что в последней таблице в разрешающем столбце (жёлтом) имеется только одно положительное число 2, поэтому нет необходимости заполнять столбец Q – это число 2 и будет разрешающим элементом.

БП	$Х_Б$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	w_1	Q
u_1	25	-11/2	0	1	0	5/2	0	
x_2	3	-3/2	1	0	0	1/2	0	
u_2	2	-5/2	0	0	1	1/2	-1	
	3	-1/2	0	0	0	1/2	M	

В последней таблице в разрешающем столбце (жёлтом) нет положительных чисел. Следовательно, нужно обратить внимание на последнюю строку столбца $Х_Б$ последней симплексной таблицы (чёрная ячейка). Мы видим, что в этой ячейке отсутствует M; как указано в подпункте **в)** пункта **2** приведённого выше алгоритма, это означает, что данная ЗЛП ***не имеет оптимальных решений из-за неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений***.

ПРИМЕР 4. Решить симплекс-методом следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} z = 5x_1 + 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приведём данную ЗЛП к каноническому виду.

а) Поскольку условие неотрицательности наложено ***на все переменные***, то дополнительные переменные со штрихами x_j' и x_j'' ***вводить не нужно***.

б) Все ограничения кроме условий неотрицательности, наложенных на переменные (т.е. кроме неравенств вида $x_j \ge 0$), преобразуем в уравнения:

$$\begin{cases} z = 5x_1 + 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + u_1 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - u_2 = 6, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; u_1 \ge 0, \; u_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) Потребуем, чтобы данная ЗЛП была задачей на ***максимум***; для этого целевую функцию z умножим на -1 и заменим **min** на **max**:

$$\begin{cases} z = -5x_1 - 4x_2 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + u_1 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - u_2 = 6, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; u_1 \ge 0, \; u_2 \ge 0. \end{cases}$$

г) Правые части всех уравнений положительны, поэтому умножать на –1 никакое уравнение не будем.

д) В левой части второго уравнения соответствующая дополнительная переменная u_2 содержится со знаком «–», поэтому в левую часть второго уравнения добавим неотрицательную искусственную переменную w_1 со знаком «+»;

эту искусственную переменную w_1 введём также и в целевую функцию z с коэффициентом – M:

$$\begin{cases} z = -5x_1 - 4x_2 - Mw_1 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + u_1 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - u_2 + w_1 = 6, \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ \ w_1 \geq 0. \end{cases}$$

2. Строим первую симплексную таблицу. Последняя ЗЛП содержит 5 переменных, поэтому в первой симплексной таблице будет 5+4=9 столбцов. Далее, последняя ЗЛП содержит 2 уравнения, поэтому в первой симплексной таблице будет 2+3=5 строк. Заполним шапку таблицы.

$С_Б$	БП	$Х_Б$						Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	

Заполним строку над переменными коэффициентами при этих переменных в целевой функции z:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-5	-4	0	0	-M	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	

Теперь заполним столбец БП. Искусственная переменная присутствует только ***<u>во втором уравнении</u>***, поэтому эту искусственную переменную w_1 запишем ***<u>во вторую строку</u>*** столбца БП; в первую же строку столбца БП запишем соответствующую дополнительную переменную u_1. Далее, заполним все остальные столбцы кроме Q так, как это указано в подпункте **а)** пункта **2** приведённого выше алгоритма:

$С_Б$	БП	$Х_Б$	-5	-4	0	0	-M	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	
0	u_1	4	2	1	1	0	0	
-M	w_1	6	1	-3	0	-1	1	
		-6M	-M+5	3M+4	0	M	0	

В последней строке присутствует только одно отрицательное число (самый левый элемент не рассматриваем) – это –M+5; обведём его окружностью; столбец, в котором он находится (жёлтый), является разрешающим столбцом. В разрешающем столбце два положительных числа, поэтому заполним столбец Q: в ячейки столбца Q запишем отношения элементов столбца $X_Б$ к соответствующим элементам разрешающего столбца: $\frac{4}{2} = 2$ и $\frac{6}{1} = 6$:

$C_Б$	БП	$X_Б$	-5	-4	0	0	-M	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	
0	u_1	4	2	1	1	0	0	2
-M	w_1	6	1	-3	0	-1	1	6
		-6M	-M+5	3M+4	0	M	0	

Среди элементов столбца Q выберем минимальный – это 2; строка, в которой он находится (голубая), – разрешающая строка. Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца – это 2 – является разрешающим элементом. Разрешающий элемент обведём квадратом.

$C_Б$	БП	$X_Б$	-5	-4	0	0	-M	Q
			x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	
0	u_1	4	$\boxed{2}$	1	1	0	0	2
-M	w_1	6	1	-3	0	-1	1	6
		-6M	-M+5	3M+4	0	M	0	

Строим следующие симплексные таблицы по правилам, указанным в подпункте **г)** пункта **2** приведённого выше алгоритма.

БП	$X_Б$	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	Q
x_1	2	1	1/2	1/2	0	0	
w_1	4	0	-7/2	-1/2	-1	1	
	-4M-10	0	7M/2+3/2	M/2-5/2	M	0	

В последней строке нет отрицательных чисел (напомним, что самый левый элемент последней строки не учитывается, а M – очень большое положительное число, существенно превосходящее любое другое число в данной таблице). Следовательно, можно перейти к заключительному этапу симплекс-метода.

3. Выпишем оптимальные значения переменных так, как это указано в пункте **3** указанного выше алгоритма.

а) $\boldsymbol{x_1 = 2}$,
$x_2 = 0$,
$u_1 = 0$,
$u_2 = 0$,
$w_1 = 4$.

б) ***искусственная переменная $\boldsymbol{w_1}$ не равна нулю***, следовательно, данная ЗЛП ***не имеет оптимальных решений из-за того, что её множество допустимых решений пусто***.